第9講　総合問題(1)

1 xについての2次方程式 $x^2-2px+p^2-2p-1=0$ の2つの解を α，βとする．
$\dfrac{(\alpha-\beta)^2-2}{2\{(\alpha+\beta)^2+2\}}$ が整数となる実数 p をすべて求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　m を 2 より大きい実数とする．x についての 2 つの方程式

$$x^2-2^{m+1}x+3\cdot 2^m=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$2\log_2 x-\log_2(x-1)=m \quad \cdots\cdots ②$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　方程式①，②ともに 2 つの異なる実数解をもつことを示せ．

(2)　方程式①の解のうち，ちょうど 1 つだけが方程式②の 2 つの解の間にあることを示せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ある人がサイコロを振る試行によって，部屋A，Bを移動する．サイコロの目の数が1，3のときに限り部屋を移る．また各試行の結果，部屋Aに居る場合はその人の持ち点に1点を加え，部屋Bに居る場合は1点を減らす．持ち点は負になることもあるとする．第 n 試行の結果，部屋A，Bに居る確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す．最初にその人は部屋Aに居るものとし（つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする），持ち点は1とする．

(1) $P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ．また，第3試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ．

(2) $P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ．

(3) $P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ．

(4) 第 n 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　x についての２次方程式 $x^2-2px+p^2-2p-1=0$ の２つの解を α，β とする．

$\dfrac{(\alpha-\beta)^2-2}{2\{(\alpha+\beta)^2+2\}}$ が整数となる実数 p をすべて求めよ．

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2p,\quad \alpha\beta=p^2-2p-1$$

このとき

$$\frac{(\alpha-\beta)^2-2}{2\{(\alpha+\beta)^2+2\}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4p^2-4(p^2-2p-1)-2}{4p^2+2}=\frac{4p+1}{4p^2+2}=k \quad \text{とおく}$$

$$4kp^2-4p+2k-1=0 \quad \cdots\cdots①$$

$k=0$ のとき題意を満たし，このとき　$p=-\dfrac{1}{4}$

$k\neq0$ のとき　p は実数より，①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4-4k(2k-1)\geqq0 \qquad 2k^2-k-1\leqq0 \qquad \text{よって}\quad -\frac{1}{2}\leqq k\leqq1$$

k は０でない整数より　$k=1$

このとき $D=0$ より①は重解 $p=\dfrac{2}{4k}=\dfrac{1}{2}$ をもつ

以上より　$\boldsymbol{p=-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}}$

2　m を２より大きい実数とする．x についての２つの方程式

$$x^2-2^{m+1}x+3\cdot2^m=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$2\log_2 x-\log_2(x-1)=m \quad \cdots\cdots②$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　方程式①，②ともに２つの異なる実数解をもつことを示せ．

(2)　方程式①の解のうち，ちょうど１つだけが方程式②の２つの解の間にあることを示せ．

(1)　$2^m=t$ とおくと　$m>2$　より　$t>4$

このとき①は $x^2-2tx+3t=0$　この判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=t^2-3t=t(t-3)>0 \quad \text{よって，①は異なる２実数解をもつ．}$$

②より　$\log_2 x^2=\log_2(x-1)+\log_2 2^m=\log_2 t(x-1)$

よって　$x^2=t(x-1)$

$$x^2-tx+t=0 \quad (t>4)$$

②の真数条件より　$x>1$

よって，この x の方程式が $x>1$ に異なる２つの実数解をもてばよい．

$f(x)=x^2-tx+t$ とおき，方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$f(1)=1>0$，$y=f(x)$ の軸：$x=\dfrac{t}{2}>2>1$，$D=t(t-4)>0$

よって，②は異なる２実数解をもつ.

(2)　①の２解を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと

$\alpha+\beta=2t \qquad \alpha\beta=3t$

また　$\alpha^2-2t\alpha+3t=0$　より　$\alpha^2=2t\alpha-3t$　　同様に　$\beta^2=2t\beta-3t$

このとき　
$$\begin{aligned} f(\alpha)\cdot f(\beta)&=(\alpha^2-t\alpha+t)(\beta^2-t\beta+t)\\ &=(t\alpha-2t)(t\beta-2t)\\ &=t^2(\alpha-2)(\beta-2)\\ &=t^2\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\}\\ &=-t^2(t-4)<0 \end{aligned}$$

よって，①の解 α，β のうち１つだけが②の解の間にある.

3　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A，B を移動する．サイコロの目の数が 1，3 のときに限り部屋を移る．また各試行の結果，部屋 A に居る場合はその人の持ち点に１点を加え，部屋 B に居る場合は１点を減らす．持ち点は負になることもあるとする．第 n 試行の結果，部屋 A，B に居る確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す．最初にその人は部屋 A に居るものとし（つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする），持ち点は１とする.

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ．また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ.

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ.

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ.

(4)　第 n 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ.

サイコロを１回振ったとき，部屋を移動する確率は $\dfrac{1}{3}$，移動しない確率は $\dfrac{2}{3}$

また，$P_A(n)+P_B(n)=1$　……①

(1)　$P_A(1)=P_A(0)\cdot\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$　　　$P_B(1)=1-P_A(1)=1-\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$P_A(2)=P_A(1)\cdot\dfrac{2}{3}+P_B(1)\cdot\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$　　　$P_B(2)=1-\dfrac{5}{9}=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

$P_A(3)=P_A(2)\cdot\dfrac{2}{3}+P_B(2)\cdot\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{14}{27}}$　　　$P_B(3)=1-\dfrac{14}{27}=\boldsymbol{\dfrac{13}{27}}$

$$\begin{aligned} E(3)&=1+1\cdot P_A(1)+(-1)\cdot P_B(1)+1\cdot P_A(2)+(-1)\cdot P_B(2)+1\cdot P_A(3)+(-1)\cdot P_B(3)\\ &=1+1\cdot\{P_A(1)+P_A(2)+P_A(3)\}+(-1)\cdot\{P_B(1)+P_B(2)+P_B(3)\}\\ &=\frac{74}{27}-\frac{34}{27}=\boldsymbol{\frac{40}{27}} \end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\boldsymbol{P_A(n+1)=\frac{2}{3}P_A(n)+\frac{1}{3}P_B(n)}$　……②

$\boldsymbol{P_B(n+1)=\frac{1}{3}P_A(n)+\frac{2}{3}P_B(n)}$　……③

(3)　②−③より

$$P_A(n+1)-P_B(n+1)=\frac{1}{3}\{P_A(n)-P_B(n)\},\quad P_A(0)-P_B(0)=1$$

よって　$P_A(n)-P_B(n)=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$　……④

(①＋④)÷2 より　$\boldsymbol{P_A(n)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}$

(①−④)÷2 より　$\boldsymbol{P_B(n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$

(4)　$E(n)=1+\sum_{k=1}^{n}\{1\cdot P_A(k)+(-1)\cdot P_B(k)\}$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$=1+\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 等式 $|x-2y|=y+\sqrt{1-x}+1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　コインを投げ，点 P を次の規則によって正三角形 ABC の頂点 A, B, C 上を動かす．点 P が A にあるときは，表が出たら B に動かし，裏が出たら C に動かす．B にあるときは，表が出たら C に動かし，裏が出たら A に動かす．C にあるときは，表が出たら A に動かし，裏が出たら B に動かす．

はじめは点 P は A にあるとし，コインを n 回投げた後に P が A にある確率を a_n，B にある確率を b_n，C にある確率を c_n とする．

(1)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n，c_n を用いて表せ．

(2)　a_n を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 9 講　総合問題(1)　　練習問題　解答

1	等式 $\lvert x-2y\rvert=y+\sqrt{1-x}+1$ ……① を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

解答例

①の左辺は整数より，右辺も整数である．よって，$\sqrt{1-x}$ は整数である．

よって，$\sqrt{1-x}=k$ （k は 0 以上の整数）とおくと，$x=1-k^2$

(i) $x \geqq 2y$ のとき

$$x-2y=y+\sqrt{1-x}+1$$

$$3y=x-1-\sqrt{1-x}=-k^2-k=-k(k+1)$$

$x \geqq 2y$ より　$3x \geqq 6y$　であるから　$3(1-k^2) \geqq -2k(k+1)$

$k^2-2k-3 \leqq 0$　　よって　$-1 \leqq k \leqq 3$

k は負でない整数より，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$k=0$ のとき　$x=1,\ y=0$

$k=1$ のとき　$x=0,\ y=-\dfrac{2}{3}$　よって不適

$k=2$ のとき　$x=-3,\ y=-2$

$k=3$ のとき　$x=-8,\ y=-4$

> この右辺の形は「隣接２整数の積」であり，いずれかは偶数．これを左辺の $3y$ と比較するとyは偶数であることがわかる．また逆に k または $k+1$ のいずれかが３の倍数であることもわかる．

(ii) $x<2y$ のとき

$$-x+2y=y+\sqrt{1-x}+1$$

$$y=x+1+\sqrt{1-x}=-k^2+k+2=-(k-2)(k+1)$$

$x<2y$ より　$1-k^2<-2(k-2)(k+1)$

$k^2-2k-3<0$　　よって　$-1<k<3$

k は負でない整数より，$k=0,\ 1,\ 2$

$k=0$ のとき　$x=1,\ y=2$

$k=1$ のとき　$x=0,\ y=2$

$k=2$ のとき　$x=-3,\ y=0$

以上より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(-8,\ -4),\ (-3,\ -2),\ (-3,\ 0),\ (0,\ 2),\ (1,\ 0),\ (1,\ 2)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 コインを投げ，点Pを次の規則によって正三角形ABCの頂点A, B, C上を動かす．点PがAにあるときは，表が出たらBに動かし，裏が出たらCに動かす．Bにあるときは，表が出たらCに動かし，裏が出たらAに動かす．Cにあるときは，表が出たらAに動かし，裏が出たらBに動かす．

はじめは点PはAにあるとし，コインをn回投げた後にPがAにある確率をa_n，Bにある確率をb_n，Cにある確率をc_nとする．

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1}をそれぞれa_n，b_n，c_nを用いて表せ．　(2) a_nを求めよ．

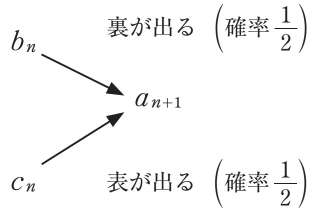
解答例

(1) $\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n}$

$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}a_n}$

$\boldsymbol{c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n}$

状態遷移図より明らかであろう．



(2) $a_n+b_n+c_n=1$ より

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n)=\frac{1}{2}(1-a_n)$$

$$=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

したがって　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$，　$a_1-\frac{1}{3}=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

よって　$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

※　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$，　$a_0-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

最初はAにいるので
$a_0=1$と考えることができる．

よって　$a_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$　　$a_n=\frac{1}{3}\left\{1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

$a_n=a_1r^{n-1}=\underline{\underline{a_0r^n}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。